数理解析研究所講究録
804巻 1992年 127-138

公理A系に対するPoisson法則

東大・数理科学　平田　雅樹（Masaki Hirata）

§1　問題と主定理．

MをコンパクトC^∞ Riemann多様体，$f: M \to M$を公理A微分同相写像とする。その非遊走集合をΩで表わし，$f|_\Omega$は混合的であると仮定する。Lipschitz連続関数$u: \Omega \to \mathbb{R}$をポテンシャルとしてとり，uに対する平衡状態（つまり，$P(u) = h_\mu(f) + \int u\, d\mu$，$P(u)$は位相的圧力，$h_\mu(f)$は測度論的エントロピー，を満たす$f$-不変測度）を$\mu = \mu_u$とする。今の設定の下では，平衡状態は一意に存在して、Gibbs測度と一致することは、よく知られた結果である。

$z \in \Omega$を固定し、$U_\varepsilon(z)$をそのε-近傍とする。$U_\varepsilon(z)$上の確率測度として、平衡状態μの$U_\varepsilon(z)$への制限：

$$\mu_\varepsilon := \frac{\mu|_{U_\varepsilon(z)}}{\mu(U_\varepsilon(z))}$$

をとる。$x \in U_\varepsilon(z)$が$U_\varepsilon(z)$に戻るまでの再帰時間を

$$T_\varepsilon(x) := \inf\{ i \in \mathbb{N}^+ \ ; \ f^i x \in U_\varepsilon(z) \}$$

と書き，またk回目の再帰時間を $T_\varepsilon^{(k)}(x)$ と書く。

i.e. $T_\varepsilon^{(1)}(x) := T_\varepsilon(x)$

$$T_\varepsilon^{(k+1)}(x) := T_\varepsilon^{(k)}(x) + T_\varepsilon\left(f^{T_\varepsilon^{(k)}(x)} x\right) \qquad k=1,2,\cdots$$

$T_\varepsilon^{(k)}$ は μ_ε-a.e. x について有限であるが，$\varepsilon \to 0$ としたとき発散するので，T_ε の平均 $E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$ で規格化することにする。つまり，規格化k回再帰時間：

$$C_\varepsilon \cdot T_\varepsilon^{(k)} \qquad C_\varepsilon := 1/E_{\mu_\varepsilon}[T_\varepsilon]$$

を考えるとき，$\varepsilon \to 0$ での極限分布がどうなるか？を考えたい。

この問題を考えるのに，次のような Counting measure（$\mathbb{R}^+$上の$\mathbb{N}^+$-値 Radon測度）を用意しよう。

$$Y_{\varepsilon,x} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{C_\varepsilon \cdot T_\varepsilon^{(k)}(x)}$$

ここで，δ_pは $p \in \mathbb{R}^+$ での Dirac の δ-測度．

$\mathbb{R}^+$上の点過程 $Y_{\varepsilon,\cdot}$ を規格化再帰時間過程と呼ぶことにする。先の問題は，$Y_{\varepsilon,\cdot}$ の $\varepsilon \to 0$ での極限を考える問題となる。

上述の問題に対する答えとして，次の主定理を得た。

<u>主定理</u>

μ_u-a.e. $z \in \Omega$ に対し，規格化再帰時間過程の有限次

元分布は、$\varepsilon\to 0$ で Poisson 点過程の有限次元分布に収束する。つまり、任意の非負整数 $k_1,\cdots,k_n$ と互いに交わらない $\mathbb{R}^+$ 上の任意の Borel 集合 $B_1,\cdots,B_n$ に対して、次式が成立する：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(\{x\in U_\varepsilon(z)\,;\,Y_{\varepsilon,x}(B_1)=k_1,\cdots,Y_{\varepsilon,x}(B_n)=k_n\})$$
$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{l(B_i)^{k_i}}{k_i!}e^{-l(B_i)}$$

ただし、l は Lebesgue 測度

上の定理で「μ_u-a.e. $z\in\Omega$ について」は本質的である。実際、$z\in\Omega$ が周期点であるとき、次の反例が成り立つ。

反例

$z\in\Omega$ を周期 m の周期点とする。このとき、規格化1回再帰時間 $c_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}$ の $\varepsilon\to 0$ での極限分布は δ-分布と指数分布の線型結合となる。つまり、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_\varepsilon(\{x\in U_\varepsilon(z)\,;\,c_\varepsilon T_\varepsilon^{(1)}(x)<t\})=1-\rho_z+\rho_z(1-e^{-\rho_z t})$$

ここで、$\rho_z := 1-\exp\{u(z)+u(fz)+\cdots+u(f^{m-1}z)\}$

次節以下で主定理の証明のアウトラインについて述べるが、非遊走集合 Ω には（有限）Markov 分割が存在するので、

問題は本質的には記号力学系での問題に帰着できる。そこで、この報告では主に片側記号力学系で問題を考えていくことにする。

§2 準備

$J=\{1,\cdots,r\}$ を有限集合、$A=(A_{ij})_{i,j=1,\cdots,r}$ を既約な構造行列とする。配置空間 Σ_A^+ を

$$\Sigma_A^+ := \{x=\{x_i\}_{i=0}^{\infty} \in J^{\mathbb{N}} ; A_{x_i x_{i+1}}=1 \quad \forall i \in \mathbb{N}\}$$

で定義し、Σ_A^+ 上のシフトを σ で表わす。(i.e. $(\sigma x)_i = x_{i+1}$)

$0<\theta<1$ を固定し、Σ_A^+ 上の距離 $d=d_\theta$ を次のように導入する。

$$d_\theta(x,y)=\theta^n \qquad \text{if } x_i=y_i \ \ i=0,\cdots,n-1,\ x_n \neq y_n .$$

この距離に関する Σ_A^+ 上の実数値Lipschitz連続関数の集合を $\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ と書く。ノルム $|||\cdot|||_\theta := \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_\theta$ (ただし、$\|f\|_\theta$ は f のLipschitz定数)に関して、$\mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ はBanach空間になる。

ポテンシャル $u \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ に対するRuelle作用素 $\mathcal{L}_u : \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ は次のように定義される。

$$\mathcal{L}_u f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{u(y)} f(y) .$$

この作用素のスペクトルについては、次の基本的結果が知られている。

定理 (Ruelle)

$\mathcal{L}_u$ のスペクトル半径は $e^{P(u)}$ で、それは単純な固有値であり、対応する固有関数は正値関数である。

ここで、$\mathcal{L}_u 1 = 1$ なる仮定を置くことにする。これは一般性を失わない仮定であり、また、このとき $P(u) = 0$ となる。

$u \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ に対する平衡状態 (i.e. $P(u) = h_\mu(\sigma) + \int u\,d\mu$ を満たす σ-不変確率測度) を $\mu = \mu_u$ で表わす。この測度に関しては次式が成立する。

$$\int \mathcal{L}_u f \cdot g \, d\mu_u = \int f \cdot g \circ \sigma \, d\mu_u \qquad \forall f, g \in \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+).$$

さて、記号力学系 $(\Sigma_A^+, \sigma, \mu_u)$ に対して問題を設定する。まず、$z \in \Sigma_A^+$ を固定し、その近傍として筒集合

$$[z]_N := \{ x \in \Sigma_A^+ ; x_i = z_i \quad i = 0, 1, \cdots, N-1 \}$$

をとる。$[z]_N$ 上の確率測度として、

$$\mu_N := \frac{\mu_u|_{[z]_N}}{\mu_u([z]_N)}$$

を定め、$x \in [z]_N$ のシフト σ による $[z]_N$ への再帰時間を $T_N(x)$ と書く。(i.e. $T_N(x) := \inf\{ i \in \mathbb{N}^+ ; \sigma^i x \in [z]_N \}$)

ここで、次の特異摂動した Ruelle 作用素 $\tilde{\mathcal{L}}_N : \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+) \to \mathcal{F}_\theta(\Sigma_A^+)$ を定義する。

$$\tilde{\mathcal{L}}_N f(x) := \mathcal{L}_u (1_{[z]_N^c} \cdot f) (x)$$

$1_{[z]_N^c}$ は $[z]_N$ の補集合の定義関数.

簡単な計算から次の補題が成立する。

補題

$$\mu_N (\{ x \in [z]_N ; T_N(x) = i \}) = \int \tilde{\mathcal{L}}_N^{i-1} (\mathcal{L}_u 1_{[z]_N}) \, d\mu_N$$

さて、最初に問題となるのは、規格化再帰時間 $c_N T_N$ ($c_N := 1/E_{\mu_N}[T_N]$) の $N \to \infty$ での極限分布である。そこで、$c_N T_N$ の Laplace 変換 $\varphi_N(\alpha)$:

$$\varphi_N(\alpha) := \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha c_N i} \mu_N (T_N = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha c_N i} \int \tilde{\mathcal{L}}_N^{i-1} (\mathcal{L}_u 1_{[z]_N}) \, d\mu_N$$

の $N \to \infty$ での極限を調べたいが、そのためには $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル，特に絶対値最大固有値の $N \to \infty$ での漸近挙動が問題となる。

§3 $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル

Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_u$ を解析的に摂動した作用素のスペクトルについては、Ruelle, Pollicott らによってよく調べられているが、特異摂動した作用素である $\tilde{\mathcal{L}}_N$ に対しては、それらの結果を直接使うことはできない。そこで具体的に $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の

スペクトルの性質を調べる必要がある。 その構造について、まず次の結果を得た。

命題

円環領域 $\Pi_\theta := \{t \in \mathbb{C} \,;\, \theta < |t| \leq 1\}$ 内の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトルは、有限多重度の孤立した固有値のみからなる。(これらを $\{\lambda_N^{(j)}\}$ と書く)

次に問題となるのは $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の絶対値最大固有値 (これを $\tilde{\lambda}_N$ と書く)の $N \to \infty$ での漸近挙動である。 これを調べるためには、いくつかの準備が必要である。

まず、$\zeta(t) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を形式的に次式で定義する:

$$\zeta(t) := \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \sum_{x \in \mathrm{Fix}_p \sigma} e^{S_p u(x)}\right\}$$

ここで、$S_p u(x) = u(x) + u(\sigma x) + \cdots + u(\sigma^{p-1} x)$.

これは、Ruelle - Artin - Mazur のゼータ関数と呼ばれ、その極と Ruelle 作用素 $\mathcal{L}_u$ の固有値との間に次の関係が知られている。

定理 (Ruelle)

円環領域 Π_θ 内の $\mathcal{L}_u$ の固有値を $\{\lambda^{(j)}\}$ と書き、$\lambda^{(j)}$ の多重度を m_j とする。このとき、$1/\lambda^{(j)}$ は円環領域 $\Pi_\theta' := \{t \in \mathbb{C} \,;\, 1 \leq |t| < \theta^{-1}\}$ 内の $\zeta(t)$ の位数 m_j の極であ

る。逆も成立する。

次に形式的な関数 $\tilde{\zeta}_N(t)$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を次で定義する：

$$\tilde{\zeta}_N(t) := \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p}{p} \sum_{x \in \mathrm{Fix}_p\sigma} e^{S_p u(x)} \prod_{j=0}^{p-1} 1_{[z]_N^c}(\sigma^j x)\right\}$$

この関数の極と、$\tilde{\mathcal{L}}_N$ の固有値との間に、先の Ruelle の定理と同様の関係が成立する。

<u>命題</u>

円環領域 Π_θ 内の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ の固有値 $\lambda_N^{(j)}$ の多重度を m_j とすると、$1/\lambda_N^{(j)}$ は円環領域 Π_θ' 内の $\tilde{\zeta}_N(t)$ の位数 m_j の極である。逆も成立する。

以上のことから、$\tilde{\zeta}_N(t)$ の収束半径を $\tilde{t}_N$ とすると、

$$\tilde{t}_N = 1/\tilde{\lambda}_N$$

なる関係があることがわかるので、$\tilde{t}_N$ の（$N\to\infty$ での）漸近挙動が問題となる。これに関して次の定理を得た。

<u>定理</u>

μ_u-a.e. z に対して、

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{t}_N = 1 \quad (= \zeta(t) \text{ の収束半径})$$

このことから、$\lim_{N\to\infty} \tilde{\lambda}_N = 1$（$=\mathcal{L}_u$ の最大固有値）なることがわかる。

また、$\tilde{\lambda}_N$ 以外の $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトルについては次の補題が成立する。

<u>補題</u>

ある $0<\rho<1$ が存在して、任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sup\{|\lambda| \,;\, \lambda\in \mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{L}}_N)\setminus \tilde{\lambda}_N\} < \rho$$

($\mathrm{Spec}(\tilde{\mathcal{L}}_N)$ は $\tilde{\mathcal{L}}_N$ のスペクトル集合)

§4 記号力学系に対する Poisson 法則

まず、$\tilde{\mathcal{L}}_N$ は次の様に分解できることに注意しておく。

<u>補題</u>

$$\tilde{\mathcal{L}}_N = \tilde{\lambda}_N \tilde{E}_N + \tilde{\Phi}_N$$

(ここで、$\tilde{E}_N$: $\tilde{\lambda}_N$ に対応する eigen projection

$\tilde{\Phi}_N$: $\tilde{E}_N\tilde{\Phi}_N = \tilde{\Phi}_N\tilde{E}_N = 0$ をみたす有界線型作用素)

上の補題中の $\tilde{\Phi}_N$ については次の評価が成立する。

<u>補題</u>

μ_u-a.e. z に対して、ある自然数 N_0 と正定数 H 及び $0<\rho<1$ が存在して、任意の $N>N_0$ に対して

$$\|\tilde{\Phi}_N^i 1\|_\infty \le H\rho^i \qquad \text{for } \forall i\in\mathbb{N}$$

先の $\tilde{\lambda}_N$ の分解を用いると、規格化再帰時間 $c_N T_N$ の Laplace 変換 $\varphi_N(\alpha)$ は以下の通りに書き下せる。

$$\varphi_N(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha c_N i} \left\{ \tilde{\chi}_N^{i-1} \int \tilde{E}_N(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N + \int \tilde{\Phi}_N^{i-1}(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N \right\}$$

次に、$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(\alpha)$ の計算に必要な量の計算結果をまとめておくと、

補題

μ_u-a.e. z に対して、

i) $$\lim_{N\to\infty} \frac{\int \tilde{E}_N(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N}{1-\tilde{\chi}_N} = \lim_{N\to\infty} \int \tilde{E}_N 1\, d\mu_N = 1$$

ii) $$c_N := 1 / E_{\mu_N}[T_N] = \mu_u([z]_N)$$

iii) $$\lim_{N\to\infty} \frac{\int \tilde{E}_N(\lambda_u 1_{[z]_N})\, d\mu_N}{c_N} = 1$$

iv) $$\lim_{N\to\infty} c_N \sum_{i=1}^{\infty} \int \tilde{\Phi}_N^{i} 1\, d\mu_N = 0 .$$

これらを用いると、$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha}$ (μ_u-a.e. z について)。これは次の定理を意味している。

定理

μ_u-a.e. z に対して、規格化再帰時間 $c_N T_N$ の $N\to\infty$ での極限分布が存在して、それは（パラメータ1の）指数分

布である。

次に k 回再帰時間 $T_N^{(k)}$ を次で定義する：

$$T_N^{(1)}(x) := T_N(x)$$

$$T_N^{(k)}(x) := T_N^{(k-1)}(x) + T_N(\sigma^{T_N^{(k-1)}(x)}x) \quad k=2,3,\cdots.$$

μ_N はシフトの σ の $[z]_N$ への誘導変換：

$$\sigma^{T_N(\cdot)} : [z]_N \to [z]_N$$

の不変測度であることに注意すれば、$c_N(T_N^{(k+1)} - T_N^{(k)})$ と $c_N T_N$ とは同分布であり、また、$(\Sigma_A^+, \sigma, \mu_u)$ が weakly Bernoulli であることから、$c_N(T_N^{(k+1)} - T_N^{(k)})$ の分布は $N\to\infty$ の極限で互いに独立になることに注意すれば、次の結果を得る。

<u>命題</u>

μ_u-a.e. z に対して、

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(c_N T_N^{(k)} \le t \text{ かつ } c_N T_N^{(k+1)} > t) = \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$

ここで、規格化再帰時間過程 $Y_{N,\cdot}$：

$$Y_{N,\cdot} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{c_N \cdot T_N^{(k)}(\cdot)}$$

を定義すれば、上の命題は、次のように表現することができる。

定理

μ_u-a.e. z に対して、規格化再帰時間過程 Y_N の有限次元分布は、$N \to \infty$ で Poisson 点過程の有限次元分布に収束する。

§5 Remark.

以上、片側記号力学系についての Poisson 法則について述べてきたが、両側記号力学系に対しても容易に拡張することができる。また、主定理は $z \in \Omega$ の ε-近傍に対しての Poisson 法則なので、Markov 分割に沿った筒集合に対する Poisson 法則とは、若干のギャップがある。しかし、$U_\varepsilon(z)$ を筒集合の有限個の和集合でうまく近似してやることにより、主定理を示すことができる。詳しくは [H] を参照。

文献

[H] : M. Hirata. Poisson law for Axiom A diffeomorphisms (to appear in Ergod. Th. & Dynam. Sys.)